Matematyka i piękno

KRZYSZTOF MAŚLANKA

1. Pojęcie piękna wydaje się zastrzeżone głównie dla sztuki lub poezji, a także dla niektórych aspektów życia codziennego, ale nie dla matematyki. Atrybutami tej ostatniej są abstrakcyjne byty platońskie, np. liczby i figury geometryczne, do których stosuje się ścisłe dedukcyjne rozumowania. Pewnym konstrukcjom oraz dowodom matematycznym można by ostatecznie przypisać cechy takie jak estetyka lub elegancja. Ale piękno? Dla wielu zresztą sama matematyka, przez przykre wspomnienia z lat szkolnych, wydaje się wprost zaprzeczeniem piękna. Znane są perypetie, wręcz cierpienia, sławnych poetów związane z nauką matematyki (Julian Tuwim, Krzysztof Kamil Baczyński).

Atrybutem piękna jest jego immanentna nieuchwytność, tajemnica. Piękno przekornie wymyka się wszelkim próbom formalizacji. Z codziennego doświadczenia znamy też inne pojęcia, o których „w zasadzie wiemy", czym są – dopóki nie musimy podać ich precyzyjnej definicji. Klasycznym przykładem jest czas: każdy doskonale zna ten termin i często go przywołuje, ale nikt nie potrafi powiedzieć, czym tak naprawdę, w swej najgłębszej istocie jest czas. Całkiem pospolitego przykładu dostarczają ludzkie twarze: jedne zdają się piękne, inne przeciwnie. I nie ma większego sensu pytać naiwnie: dlaczego? Angielski poeta Alfred E. Housman (1859–1936) powiedział kiedyś z zaskakującą szczerością, że on sam, autor cenionych wierszy, nie wie, czym jest poezja, przez co przypomina psa, który też nie potrafi zdefiniować szczura, ale gdy go już zobaczy, to jednak dobrze wie, że to szczur.

Mimo wszystko matematyka może poszczycić się swoistym pięknem. Bertrand Russell (1872–1970) powiedział z nietypową, jak na filozofa i logika, egzaltacją:

> Matematyka […] jest w posiadaniu nie tylko prawdy, ale i najwyższego piękna, choć jest to piękno zimne i surowe […], a przy tym cudownie czyste. W matematyce, tak jak i w poezji, można znaleźć ducha prawdziwego zachwytu, a to daje poczucie bycia kimś więcej, niż Człowiekiem.

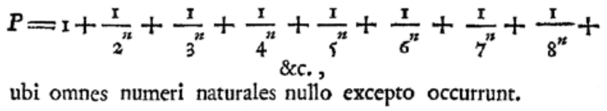
2. By bliżej wyjaśnić problem, warto podać konkretny przykład. Będzie to przykład wzięty z teorii liczb, która już w starożytności, ponad dwa i pół tysiąca lat temu, była głównym filarem matematyki greckiej i osiągnęła tam wysoki stopień ścisłości. (Drugim filarem była geometria.) Matematyk niemiecki Leopold Kronecker (1823–1891) powiedział kiedyś, że dla matematyka teoria liczb jest jak pewna niezwykła roślina dla mitycznego plemienia Lotofagów (IX Księga *Odysei* Homera): kto raz jej spróbował, ten już na zawsze pozostanie pod jej wpływem, znajdzie kojące zapomnienie i nigdy nie będzie chciał zakosztować czegoś innego.

W centrum analitycznej teorii liczb znajduje się obiekt tajemniczy, prawdziwy klejnot: tzw. funkcja dzeta Riemanna oznaczana grecką literą ζ. Obiekt nadzwyczaj niepozorny, a jednak skrajnie trudny; pełen licznych, zazdrośnie skrywanych tajemnic, brzemienny w głębokie, często sprzeczne z intuicją implikacje, i to nie tylko matematyczne. Przytoczę tu podręcznikową definicję tej funkcji – nie po to, by zniechęcić niematematyków, lecz by pokazać, jak niewielu potrzeba do tego symboli:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

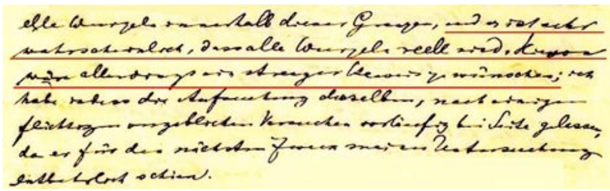
(Część rzeczywista zmiennej zespolonej s musi być > 1.)

Na formułę tę natknął się jako pierwszy Leonard Euler (1707–1783), który też zauważył, że funkcja dzeta wiąże się z liczbami pierwszymi. Ta własność stanowi jej istotę i jest główną motywacją badań.


$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} +$$
&c.,
ubi omnes numeri naturales nullo excepto occurrunt.

Funkcja dzeta w dziele Eulera *Introductio in analysin infinitorum* z 1748 r. Używał on oznaczenia *P* oraz czytelnego, ale dość rozwlekłego, jak na dzisiejsze standardy, zapisu.

Szczególnie wnikliwie przebadał tę funkcję Bernhard Riemann (1826–1866) w swojej ośmiostronicowej pracy z roku 1859, nadesłanej do Akademii Nauk w Berlinie z okazji wyboru na jej członka. Riemann usiłował znaleźć odpowiedź na proste zdawałoby się pytanie: jaka jest częstość pojawiania się liczb pierwszych wśród wszystkich liczb całkowitych? Postawił też mimochodem pewną sławną hipotezę dotyczącą tej funkcji. Hipoteza ta do dziś pozostaje nierozstrzygnięta, mimo ponad półtora wieku trwających wysiłków w celu jej dowiedzenia lub obalenia, a także obietnicy miliona dolarów nagrody. Panuje przekonanie, że jest to najważniejszy z nierozwiązanych problemów matematycznych.



Fragment rękopisu pracy Riemanna z roku 1859, przechowywany z pietyzmem w bibliotece uniwersyteckiej w Getyndze. Zawiera on jedno z najbardziej doniosłych zdań w całej literaturze matematycznej. Jest to hipoteza dotycząca funkcji dzeta, mówiąca, że wszystkie zespolone pierwiastki tej funkcji leżą dokładnie na linii prostej. Gdyby faktycznie tak było, miałoby to wielkie znaczenie dla naszej wiedzy o liczbach pierwszych. „Oczywiście – pisze Riemann – ścisły dowód byłby tu bardzo pożądany. Po kilku krótkich, nieudanych próbach odłożyłem na jakiś czas poszukiwania tego dowodu".

3. Funkcja dzeta posiada kilka reprezentacji. Jedną z nich, zbieżną na całej płaszczyźnie zespolonej, znalazł autor niniejszego tekstu w roku 1997[1]:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k+1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \frac{A_k}{k!}$$

gdzie Γ to funkcja gamma Eulera, zaś A_k są współczynnikami liczbowymi wyrażającymi się przez potęgi liczby π oraz przez liczby Bernoulliego B_n:

$$A_k \equiv \pi^2 \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(2\pi)^{2j}}{(2j)!} \frac{B_{2j+2}}{j+1}$$

(ciąg dalszy – str. 3)

[1] K. Maślanka, *The Beauty of Nothingness: Essay on the Zeta Function of Riemann*, Acta Cosmologica XXIII–1 (1998), s. 13–17.

Matematyka i piękno

(ciąg dalszy ze str. 2)

Formuła ta ukazuje w sposób jawny pewne własności funkcji dzeta ukryte w innych jej reprezentacjach. Korzystając z niej, matematyk z Wenezueli Luis Báez-Duarte odkrył w roku 2003 nowe kryterium dla hipotezy Riemanna, tj. warunek równoważny tej hipotezie[2]. Mówi on, że jeśli zdefiniować ciąg liczb rzeczywistych c_k jako

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j \binom{k}{j}}{\zeta(2j+2)}$$

wówczas kluczowe znaczenie ma szybkość ich zdążania do zera, gdy k dąży do nieskończoności. (Liczby te również zależą od potęg liczby π oraz od liczb Bernoulliego.) Dokładniej, hipoteza Riemanna jest równoważna warunkowi:

$$c_k = O\left(k^{-3/4+\varepsilon}\right)$$

gdzie O oznacza symbol Landaua, natomiast ε jest dowolnie małą stałą dodatnią.

4. Nawet najbardziej zaprzysięgły wróg matematyki, o zainteresowaniach czysto humanistycznych, zna powiedzenie: rozłożyć coś na czynniki pierwsze. Powiedzenie to weszło na trwałe do języka codziennego. Liczby pierwsze, czyli 2, 3, 5, 7, 11, 13…, mają tę własność, że każda z nich dzieli się bez reszty tylko przez jedynkę i przez samą siebie. Są to byty bardzo podstawowe. Już małe dziecko, które bawi się kamykami, może zauważyć, że jeśli jest ich np. 10, to można je ułożyć w dwa r ó w n e rzędy po 5 sztuk w każdym. Podobnie jest z liczbą 12: można ułożyć 2 rzędy po 6 albo 3 rzędy po 4. Natomiast z jedenastoma kamykami sztuka ta nigdy się nie uda. 11 jest liczbą pierwszą, 10 i 12 są złożone. Spostrzeżenie to jest autentycznie bardzo elementarne i jednocześnie uniwersalne: w rozwoju intelektualnym człowieka poprzedza pojawienie się artykułowanej mowy, pisma czy abstrakcyjnych rozumowań. Każda potencjalna inteligentna cywilizacja kosmiczna powinna ten fakt zauważyć, nawet jeśli nie stworzy zaawansowanej techniki, nie mówiąc już o literaturze czy muzyce.

Jak zatem rozmieszczone są liczby pierwsze wśród innych liczb całkowitych? Jak będzie w zakresie liczb coraz większych? Poglądy co do odpowiedzi na te pytania są od wieków jednoznacznie pesymistyczne. Wspomniany powyżej Euler napisał:

> Matematycy próbowali na próżno odkryć jakiś porządek w ciągu liczb pierwszych. My jednak mamy wszelkie powody, by wierzyć, że jest w tym jakaś tajemnica, której umysł ludzki nie zgłębi nigdy. By się o tym przekonać, wystarczy rzut oka na tablice liczb pierwszych (które niektórzy skonstruowali powyżej wartości 100 000): wówczas zauważymy, że nie ma tam ani porządku, ani żadnych reguł.

Matematyk węgierski Paul Erdös (1913–1996) także nie miał wątpliwości w tej kwestii (1987):

> Upłyną miliony lat nim zdobędziemy jakieś zrozumienie, ale nawet wtedy nie będzie ono pełne, bowiem w tym przypadku stoimy naprzeciw Nieskończoności.

Jedno jest pewne: tajemnica ta – czy ją kiedykolwiek poznamy, czy nie – jest zawarta w niepozornie wyglądającej funkcji dzeta.

5. Kiedy brakuje trafnej idei, można się uciec do eksperymentu. W matematyce, w przeciwieństwie do innych dziedzin współczesnej nauki, eksperymenty są względnie tanie, a ostatnio pomagają w nich komputery. Choć działają one coraz szybciej i radzą sobie z coraz większymi liczbami, to jednak żaden z nich z całą pewnością nie dosięgnie nigdy tego, co jest jednym z atrybutów teorii liczb – nieskończoności. Każda bowiem liczba, choćby wydawała się psychologicznie olbrzymia, jest i tak czymś nieskończenie małym w porównaniu z nieskończonością. Z tego powodu w teorii liczb komputery często dają mylne sugestie.

Na przykład, numeryczne eksperymenty „przekonująco" sugerowały przez lata, że postawiona w roku 1897, przez związanego z Krakowem matematyka Franciszka Mertensa (1840––1927), pewna hipoteza dotycząca teorii liczb jest prawdziwa. Wielu zresztą gorąco życzyło sobie tej prawdziwości, bo pociągnęłaby ona za sobą prawdziwość samej hipotezy Riemanna. Jednak w roku 1983 i 1985 dwóch matematyków (mający polskie korzenie Amerykanin Andrew M. Odlyzko i Holender Herman J.J. te Riele[3]) pokazało, że hipoteza Mertensa jest ponad wszelką wątpliwość fałszywa. Oznacza to, że istnieje pewna liczba naturalna, zbyt wielka, by to sprawdzić z pomocą komputerów, dla której postulat Mertensa nie jest spełniony – choć jest spełniony dla wszystkich liczb mniejszych. Tak więc intuicja i eksperyment numeryczny przegrały po raz kolejny ze ścisłym dowodem – czystym tworem ludzkiego umysłu[4].

I to właśnie jest jednym z aspektów matematycznego piękna: prostota postawienia trudnego problemu, lapidarny zapis, ważne implikacje, a jednocześnie element zaskoczenia, kiedy to okazuje się, że intuicja – poparta licznymi eksperymentami komputerowymi – podpowiada coś jawnie sprzecznego ze stanem faktycznym. W dobie „inwazji" komputerów i wobec powszechnego zachwytu nad nimi warto o tym pamiętać.

KRZYSZTOF MAŚLANKA
Instytut Historii Nauki PAN, Warszawa–Kraków

[2] L. Báez-Duarte, *On Maslanka's Representation for the Riemann Zeta Function*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, t. 2010 (2010), Article ID 714147, ss. 9. doi:10.1155/ /2010/714147.

[3] A.M. Odlyzko, H.J.J. te Riele, *Disproof of the Mertens conjecture*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 357 (1985), s. 138–160. [Pierwszy komunikat autorzy ogłosili w 1983 r.; pełną publikację w 1985 r.].
http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/arch/mertens.disproof.pdf

[4] Interesujące jest, że w dowodzie Odlyzko i te Riele były jednak elementy komputerowe – m.in. numeryczne wartości kilkuset początkowych zespolonych miejsc zerowych funkcji dzeta, policzonych z dużą dokładnością. Mówiłem o tym szczegółowo w referacie (wspólnie ze śp. Prof. A. Pelczarem) wygłoszonym na posiedzeniu Komisji Filozofii Nauk Przyrodniczych PAU 10 maja 2010, złożonym do druku w V tomie prac tej Komisji. – K. Maślanka, *Ćwierć wieku od obalenia hipotezy Mertensa (1985). Refleksje na temat dowodu komputerowego*, 2011 (w druku).

Wydarzenia

- Instytut Filologii Wschodniosłowianskiej UJ
- Komisja Słowianoznawstwa O/PAN w Krakowie
- Komisja Historycznoliteracka O/PAN w Krakowie
- Komisja Wschodnioeuropejska PAU

6 lipca 2011, godz. 11.00, Mała Aula PAU przy ulicy Sławkowskiej 17
nadzwyczajne posiedzenie połączonych Komisji
poświęcone pamięci
doc. dr hab. Ewy Korpały-Kirszakowej (1936–2011)